Title	標數 p ノ係數体ニ於ケル Gruppenring ニツイテIII
Author(s)	大島, 勝
Citation	全国紙上数学談話会. 219 p.360-p.364
Issue Date	1941-07
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74875
rights	
Note	

945. 標數 p ノ係數体ニ於ケル Gruppenring ニツイテ III

大島　勝（高知高校）

I 及ビ II ニツイテ中山サンカラ、次ノヤウナ御教示ヲ受ケマシタカラ補足トシテ述べマス。

即チ I ニ於ケル $\mathfrak{G}$ ガ位數 g' ノ Normalteiler $\mathfrak{g}$ ヲモテバ Gruppenring Γ ガ Primär zerlegbar ナルコトノ証明ニ於テ Γ ノ構造ヲ用ヒナクトモ、charakter 計算ニヨリ必要十分條件トモ一貫シテ証明出来ルコト。

次ニII ニ於テ $\overline{Z}_i$ ガスベテ既約ナルタメノ必要十分條件トシテ Γ ガ Primär zerlegbar デ $Sp(C)=n$ ナルコトヲ証明シテ, 注意トシテ一般ニ $Sp(C) \geqq n$ ガ成立スルノデハナイカト書イテオキマシタ所、コレモ一般ノ場合ニ証明出来テ、且ツ $Sp(C)=n$ ナルトキハ $\overline{Z}_i$ ガスベテ既約ニナルコトヲ証明シテ頂キマシタ。従ツテスベテノ $\overline{Z}_i$ ガ既約ナルタメノ必要十分條件トシテハ単ニ $Sp(C)=n$ ダケデ良イコトニナリマス。

先ヅ最初ノ方ノ証明カラ、$\mathfrak{G}$ ガ位数 g' ノ Normalteiler $\mathfrak{G}'$ ヲモテバ Block B_1 ハ Primär デアル (Brauer-Nesbitt P. 587) F_κ 及ビ U_κ ノ Charakter ヲ $\varphi^{(\kappa)}$, $\eta^{(\kappa)}$ トスレバ $\eta^{(\kappa)}$ ハ $\eta^{(1)} \times \varphi^{(\kappa)}$ ノ中ニ含マレル. (Brauer-Nesbitt P. 580 冒頭). シカルニ $\eta^{(1)}$ ハ B_1 ガ Primär ダカラ $\varphi^{(1)}$ ダケカラ成ツテヰルコトカラ $\eta^{(1)} \times \varphi^{(\kappa)}$ ハ $\varphi^{(\kappa)}$ $(=1\times\varphi^{(\kappa)}=\varphi^{(1)}\times\varphi^{(\kappa)})$ バカリ、故ニ $\eta^{(\kappa)}$ ハ $\varphi^{(\kappa)}$ ノミカラ成ツテヰル. コレガスベテノ κ ニツイテ成立スルカラ, スベテノ Block ガ只一ツノ mod. irred. Char. ヨリナリ Γ ガ Primär zerlegbar デアル。

$Sp(C) \geqq n$ ナルコトノ証明

$$C = D'D$$

コヽニ D ハ

$$
\begin{array}{c|c}
 & F_1 \ F_2 \cdots F_k \cdots F_k \\
\hline
\begin{matrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_n \end{matrix} & \left(\begin{matrix} & \vdots & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ \cdots & d_{ik} & \\ & & \\ & & \end{matrix} \right)
\end{array}
\quad , \quad d_{ik} \geqq 0
$$

故ニ

$$c_{kk} = \sum_{i=1}^{n} d_{ik}^2$$

$$Sp(c) = \sum_{k}^{k} c_{kk}$$

$$= \sum_{k=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} d_{ik}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{k} d_{ik}^2$$

各 i ニツイテ少クトモ一ツ $d_{ik} \neq 0$ ナル k ガアルカラ

$$\sum_{k=1}^{k} d_{ik}^2 \geqq 1$$

モシ $d_{ik} \neq 0$ ナル d_{ik} ガ少クトモ二ツアルカ，或ヒハ $d_{ik} \geqq 2$ ナル k ガ少クトモ一ツアレバ．確カニ不等号ガ成立スル。

故ニ一般ニ

$$Sp(C) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{k} d_{ik}^2 \geqq \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

等号ガ成立スルニハ，スベテノ i ニツイテ $d_{ik} = 1$,

$d_{i\lambda}=0$ ($\kappa \neq \lambda$) ガ成立スルトキニ限ル．コノコトハ表現ノ方デ考ヘレバ

$$\overline{Z}_i \cong F_\kappa$$

ナルコトヲ示シテキル．即チ $Sp(C)=n$ ナルトキハ，スベテノ $\overline{Z}_i$ ガ既約デアル。Block B_κ ニ屬スル Z_i ハ $\overline{Z}_i \cong F_\kappa$ ヲ満足スルモノノミカラナツテキルコトモ明カデアル。

次ニ逆ノ方、即チスベテノ i ニツイテ $\overline{Z}_i$ ガ既約ナルトキハ $Sp(C)=n$ ナルコトヲ證明スル。

$$\overline{Z}_i \cong F_\kappa$$

トスレバ $d_{i\kappa}=1$, $d_{i\lambda}=0$ ($\kappa \neq \lambda$)。

從ツテ $$Sp(C)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{k} d_{i\kappa}^2 = n$$ トナル。

以上ヲマトメレバ

<u>定理</u>　$\mathfrak{G}$ ノ既約表現 Z_i ガ mod. field ニ移ツタトキスベテ既約ナルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ Cartan Invariants ノナス Matrix C ニツイテ

$$Sp(C)=n$$

ガ成立スルコトデアル。

$Sp(C)=n$ デアレバ、スベテノ i ニツイテ $d_{i\kappa}=1$ $d_{i\lambda}=0$, ($\kappa \neq \lambda$) ナル故 $C=D'D$ ヨリ Matrix C ハ diagonal Matrix トナル。即チ Γ ハ Primär zerlegbar デアル。從ツテ $\mathfrak{G}$ ハ位數 g' ノ Normalteiler ヲモチ $\mathfrak{G}'$ ニ含マレル $\mathfrak{G}$ ノ共軛類ノ中、ソノ含

ム元ノ個数 g_h ($h=1,2,\cdots\cdots,k$) ガ丁度 p^α デ割レル

モノノ個数ヲ m_α トスレバ

$$S_p(c)=\sum_{\alpha=0}^{a} m_\alpha p^{a-\alpha}$$

ナル故、上ノ定理ヲ群論的ニ云ヒナホセバ、II ニ述ベタ定理ヲ得ルワケデアル。

(註): 大島氏ノコノ群論的 formulation ガ大変面白ク，上記私ノ一寸オ手傳ヒシタ部分ハイハバ豫備ニスギマセン。(中山)